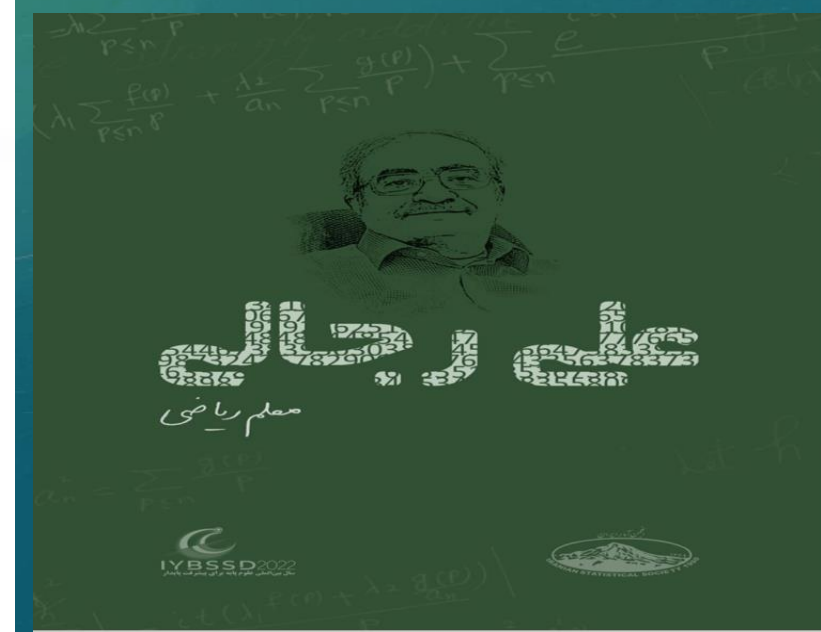


به نام خدا

آمار و احتمال: اهمیت و نحوه ارائه آن در مقطع
اول دبیرستان

سه شنبه ۳۰ بهمن ۱۴۰۳ - همایش کشوری
دانش افزایی مباحث آمار و احتمال در
ریاضیات مدرسه ای-شهرستانهای تهران



استان تهران در سال ۱۳۹۵ دارای ۱۳،۲۶۷،۶۳۷ نفر جمعیت بوده است.

ردیف	شهرستان	مرکز	جمعیت سال ۱۳۹۰	جمعیت سال ۱۳۹۵
۱	<u>تهران</u>	<u>تهران</u>	۸،۷۳۷،۵۱۰	۹،۴۵۰،۱۳۲
۲	<u>شهریار</u>	<u>شهریار</u>	۷۴۴،۲۱۰	۸۷۳،۱۳۵
۳	<u>اسلامشهر</u>	<u>اسلامشهر</u>	۴۵۸،۶۸۸	۵۴۸،۶۲۰
۴	<u>بهارستان</u>	<u>گلستان</u>	۵۲۳،۶۳۶	۵۳۶،۳۲۹
۵	<u>ملارد</u>	<u>ملارد</u>	۳۷۳،۹۹۴	۳۷۷،۲۹۲
۶	<u>پاکدشت</u>	<u>پاکدشت</u>	۲۹۱،۳۹۷	۳۵۰،۹۶۶
۷	<u>ری</u>	<u>ری</u>	۳۱۹،۳۰۵	۳۴۹،۷۰۰
۸	<u>قدس</u>	<u>قدس</u>	۲۹۰،۶۳۳	۳۱۶،۶۳۶
۹	<u>رباط کریم</u>	<u>رباط کریم</u>	۱۹۵،۹۱۷	۲۹۱،۵۱۶
۱۰	<u>ورامین</u>	<u>ورامین</u>	۵۲۶،۲۹۴	۲۸۳،۷۴۲
۱۱	<u>قرچک</u>	<u>قرچک</u>	-	۲۶۹،۱۳۸
۱۲	<u>پردیس</u>	<u>پردیس</u>	-	۱۶۹،۰۶۰
۱۳	<u>دماوند</u>	<u>دماوند</u>	۱۰۰،۶۹۰	۱۲۵،۴۸۰
۱۴	<u>پیشوا</u>	<u>پیشوا</u>	۷۵،۴۵۴	۸۶،۶۰۱
۱۵	<u>شمیرانات</u>	<u>شمیران</u>	۴۴،۰۶۱	۴۷،۲۷۹
۱۶	<u>فیروزکوه</u>	<u>فیروزکوه</u>	۳۸،۷۱۲	۳۳،۵۵۸

به این سوال ها روی کاغذ داده شده جواب دهید:

۱. تاریخ دقیق تولد

۲. وضعیت تاهل

۳. سابقه تدریس در دوره اول متوسطه

۴. در خانواده پدر شما چند فرزند وجود داشته است؟

۵. امروز از محل زندگی شما تا محل جلسه چه مدت زمان (تقریبا) طول کشید؟

۶. به یکی از دونفری که مشخص می شوند ، به عنوان نماینده رای دهید.

۷- سکه ای را پرتاب کنید، در چندمین بار پرتاب، برای اولین بار، عدد ظاهر می شود؟ این تعداد را بنویسید.

نمونه سوال های مناسب برای دانش آموزان

۱. آنچه خودشان پیشنهاد می دهند.
۲. کدام یک از غذاها را بیشتر دوست دارید (پیتزا-ماکارونی- چلو خورش)؟
۳. دیروز از پول توجیبیتان (یا کارنتان) چقدر هزینه کرده اید؟
۴. در لیگ برتر فوتبال، فکر می کنید امسال کدام تیم برنده می شود؟
۵. در طول هفته گذشته چند ساعت با صفحات مجازی مشغول بوده اید؟
۶. در خانواده پدر شما چند فرزند وجود داشته است؟
۷. امروز چه مدت زمان طول کشید تا به کلاس برسید؟
۸. به یکی از دو نفری که مشخص می شوند ، به عنوان نماینده کلاس رای دهید.

امروزه احتمال و آمار بخشی از برنامه های درسی ریاضیات برای مدارس ابتدایی و متوسطه در بسیاری از کشورها را به خود اختصاص داده اند.

دلایل گنجاندن این موضوعات در برنامه درسی عبارتند از:
سودمندی آمار و احتمال برای زندگی روزمره،
نقش ابزاری آن در سایر رشته ها،

نیاز به دانش اولیه تصادفی در بسیاری از حرفه ها و
نقش آمار و احتمال در اثبات ادعاها و استدلالهای انتقادی.

Alinian, P., Mohammadi, R., Parvaneh, A., and Rejali, A. "An Approach to Development: Turning Education from a Service Duty to a Productive Tool." *Advances in Mathematics Education Research*, Nova Science Publishers, Inc., doi.org/10.52305/MXVX8331

ترجمه آن:

امیر حسین اشتری و پویا علی نیان - "راهی به سوی توسعه پایدار، تبدیل آموزش از رده خدمات به تولید" نشریه سیهر اقتصاد کرمان شماره 23 (پاییز 1403) صفحات ۱۳۵ تا ۱۳۹.

<https://pub.otagh-bazargani.com/%d8%b1%d8%a7%d9%87%db%8c-%d8%a8%d9%87-%d8%b3%d9%88%db%8c-%d8%aa%d9%88%d8%b3%d8%b9%d9%87-%d9%be%d8%a7%db%8c%d8%af%d8%a7%d8%b1%d8%8c-%d8%aa%d8%a8%d8%af%db%8c%d9%84-%d8%a2%d9%85%d9%88%d8%b2%d8%b4-%d8%a7/>

چرا درک داده ها و آمار برای دانش آموزان K-12 مهم است؟

درک نحوه استفاده از داده ها، نحوه جمع آوری و چرایی جمع آوری آنها به شما کمک می کند تا بفهمید که می توانید توسط آنها قدرت بگیرید یا می توانید توسط آنها اغفال شوید.

دانش آموزان و معلمان هر روز با داده ها احاطه می شوند (مخصوصاً در قرن اطلاعات) و اغلب از آن برای اطلاع رسانی تصمیمات خود استفاده می کنند- بدون اینکه کاملاً بفهمند از کجا آمده است یا چگونه جمع آوری شده است. این یکی از دلایل مهمی است که نشان می دهد آموزش آمار برای دانش آموزان و معلمان آنها بسیار مهم است.

از سوی دیگر: مفاهیم غیر معین یا غیر قطعی (Stochastic) شامل احتمال و آمار و علوم داده ها- این روزها به یک موضوع مهم آموزشی مورد تاکید تبدیل شده است.

وضعیت ریاضی در مدارس

سال 1401:

مدیرکل دفتر آموزش متوسطه نظری وزارت آموزش و پرورش درباره آمار دانش آموزان شاخه نظری به تفکیک رشته ای گفت: از میان یک میلیون و 713 هزار و 872 دانش آموز شاخه نظری، تنها 15.49 درصد از دانش آموزان در رشته ریاضی مشغول به تحصیل هستند، اما رشته تجربی با 43.48 درصد رونق خوبی دارد.

اهمیت آمار و احتمال برای آموزش مدلسازی ریاضی از دوران مدرسه

یکی از علایق رجالی از دوران دبستان توجه به استفاده از ریاضیات در مسایل روزمره ، برای درک بهتر مفاهیم ریاضی بود. از همان زمان یکی از هنرهای او طرح سؤالی از کاربردی ریاضی در زندگی بود . که از این بابت در شهر معروف شده بود. دانش آموزان خوب از مدارس دیگر می آمدند در منزل و سؤال ها را می گرفتند و صورت آن مسایل که معمولاً کوتاه نبود را کنار کوچه در دفترچه خود می نوشتند و تلاش می کردند حل کنند. این علاقه این قدر جلو رفت که پس از طی دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی محض از دانشگاه شیراز ، برای ادامه تحصیل به رشته آمار دانشگاه استنفورد آمریکا رفت (که البته واضح بود که زمینه توانایی او در ریاضی محض، برای درک مسایل آماری و کار با داده ها، کمک بزرگی بود). از آغاز تدریس در دانشگاه و کارهای دیگری که در کنار تدریس داشت و نیز مباحث مطرح شده در کنگره های بین المللی آموزش ریاضی ، همین ذائقه کمک کرد ، به حدی که "پروفسور کینت" یکی از موسسان انستیتو فرودنتال هلند در مقاله ای که به مناسبت دهمین سال تاسیس خانه ریاضیات اصفهان نوشته است ، به این نکته و توجه رجالی به ریاضیات واقعی توجه کرده است و تیتیر مقاله خود را برگرفته از ریاضیات دنیای واقعی (Realistic Mathematics) این چنین قرار داده است.

14. Kindt, M., Re(j)alistic maths, Nieuwe Wiskrant 28-4/juni 2009, pp 41-45
http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/284/284juni_kindt.pdf

A-lympiad هم یک مسابقه ریاضی برای تیم های 3 یا 4 دانش آموزان است (که توسط موسسه فرودنتال دانشگاه اوترخت در هلند برگزار می شود و خانه های ریاضیات هم از ابتدا در آن شرکت داشتند) و در آن توانایی درک و بکارگیری آمار و احتمال بسیار ضروری است.

علم احتمال چیست؟ راجع به چه موضوعی بحث می کند؟

هر گروه نظر خود را بیان کند

جواب نهایی

مطالعه آزمایش ها و پدیده های تصادفی (آن ها که نتیجه قطعی آن ها از قبل معلوم نیست، ولی مجموعه آن ها مشخص است).
این مجموعه را فضای نمونه (S) می نامند.

۱. نتیجه انتخابات دوره بعد مجلس شورای اسلامی از تهران

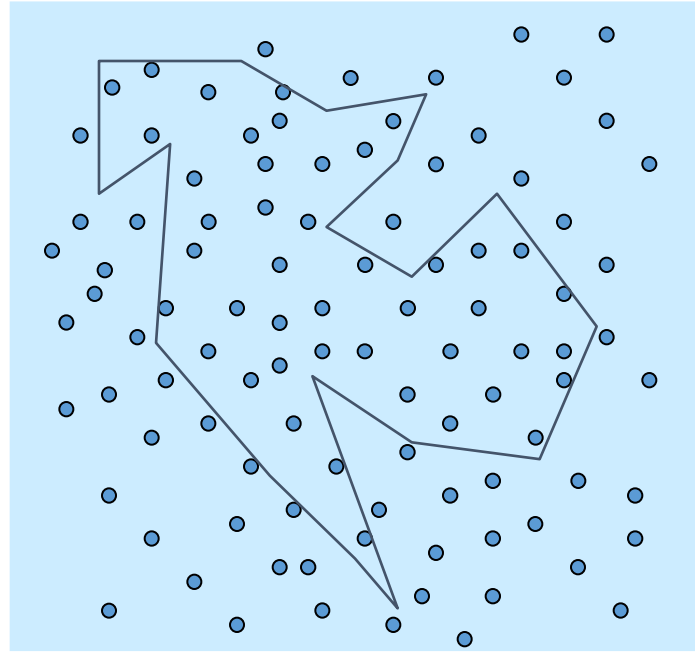
۲. تعداد دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی ایران در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

۳. میزان بارش باران در ایران در پاییز وزمستان ۱۴۰۳

۴. مساحت ناحیه ای که حدود آن منحنی های نامشخص یا پیچیده است.

۵. مساله حق بیمه شخص ثالث برای رانندگان متفاوت(براساس میزان خطر پذیری راننده)

بسیاری از پدیده های اطراف ما تصادفی و نامعین هستند و آوردن مثال از یک پدیده معین بسیار سخت است ولذا یادگیری قوانین احتمال برای هر شهروند یک ضرورت است.



$$P(A) = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S} \approx \frac{\text{تعداد نقاط داخل } A}{\text{تعداد نقاط داخل } S} = \frac{45}{100}$$

$$(\text{مساحت } A) = P(A) (\text{مساحت } S) \approx \frac{45}{100} (100) = 45$$

پیشامد

برخی از زیر مجموعه های فضای نمونه **پیشامد** هستند.

$$A \subset S$$

موقعی اتفاق می افتد که نتیجه آزمایش عضو آن باشد. **A**

مثلا اگر دانش آموزی در درسی ثبت نام کند. نتیجه او در پایان سال یک پدیده تصادفی است با فضای نمونه

$$S = [0, 20] \cup \{D\}$$

که یکی از پیشامدهای مطلوب قبولی است که عبارتست از

$$A = [10, 20]$$

و دانش آموزی در این درس قبول می شود که نمره ای بین ۱۰ و ۲۰ و یا خود نمرات ۱۰ و ۲۰ را اخذ کند.

تابع احتمال

نسبت دادن عددی در مجموعه یا بازه

به هر پیشامد که از اصول زیر تبعیت می کند: $[0,1]$

1. $P(A) \geq 0$, for all events A
2. $P(S)=1$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1)+P(A_2)+\dots$, when A_i 's are mutually exclusive events
($A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$)

مجموعه ها یا پیشامدهای دوبرو از هم جدا یا ناسازگار

– مشابه نحوه محاسبه مساحت یک شکل

مدل احتمال

برای هر پدیده یا آزمایش تصادفی یک فضای احتمال وجود دارد ، که شامل سه عنصر اصلی ،

۱. S مجموعه نتایج ممکن آزمایش (فضای نمونه = Sample Space) ،

۲. تعدادی از زیر مجموعه های S به نام جبر پیشامدها (Algebra of Events) ، که عناصر آن را پیشامد یا Event می نامند و

۳. یک تابع احتمال (Probability Function) و برای هر پیشامد A ، یک مقدار عددی $P(A)$ دارد که از سه اصل زیر تبعیت می کند:

Axiom 1 $P(A) \geq 0$.

Axiom 2 $P(S) = 1$.

Axiom 3 *If $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ is a sequence of mutually exclusive events (i.e., the joint occurrence of every pair of them is impossible: $A_i A_j = \emptyset$ when $i \neq j$), then*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه هشتم از احتمال

اندیشه آماری، سال صفر ۲۸، شماره یک، بهار و تابستان ۱۴۰۲، شماره پیاپی ۵۵، صص ۸۵-۱۰۰

۸۵

فرا ترکیبی از تعاریف و مؤلفه‌های تفکر آماری

آناهیتا کمیجانی^۱، ابراهیم ریحانی^۲، زهرا رحیمی^۳ و احسان بهرامی سامانی^۴

مفهوم احتمال در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی: نگاهی تحلیلی به
مفاهیم و سطوح استلزام شناختی تکالیف

مجتبی اسکندری^۱، ابراهیم ریحانی^{۲*}، مهدی ایزدی^۳

تعابیر مختلف احتمال

۱. مدل کلاسیک یا همتراز (که به فارسی به اشتباه همشانس می گویند): وقتی تعداد حالات ممکن متناهی (یعنی فضای نمونه متناهی باشد.

$$|S| < \infty$$

و نحوه انجام آزمایش طوری باشد که هیچ برآمد (پیشامد ساده یا نتیجه ممکن) بر دیگری مزیت یا ارجحیت نداشته باشد. در این صورت فضای نمونه عبارتست از:

$$S = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

و انتظار داریم :

$$P\{a_1\} = P\{a_2\} = \dots = P\{a_n\}$$

پس :

$$1 = P(S) = P\{a_1\} + P\{a_2\} + \cdots + P\{a_n\} = nP\{a_k\}, \quad \forall k$$

و در نتیجه

$$P\{a_k\} = \frac{1}{n}, \quad \forall k$$

و اگر پیشامدی به فرم زیر داشته باشیم :

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

$$P(A) = P\{a_{i_1}\} + P\{a_{i_2}\} + \cdots + P\{a_{i_k}\} = \frac{k}{n}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

تعداد حالات مساعد نسبت به حالات ممکن

همترازی (یا کلاسیک)

اگر فضای نمونه یک آزمایش یا پدیده تصادفی متناهی

$$n(S) < \infty \text{ e.g. } S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

و انجام آزمایش یا اتفاق افتادن پدیده به نحوی باشد که هر پیشامد ساده (عناصر S) با سایر عناصر

(پیشامدهای ساده) همتراز (*equally likely*) باشند یعنی در نحوه انجام آزمایش یکی بر دیگری ارجح نباشد. این آزمایش را همتراز یا کلاسیک گویند. اگرچه این حالت با همشانسی (یا هم احتمالی) متفاوت است ، ولی در کتب فارسی مدل احتمال یکنواخت یا همشانس گفته می شود.

مثلا اگر من در جلسه اول کلاس یک نفر از شما همکاران را به عنوان نماینده کلاس می خواستم انتخاب کنم. همه شما برای من همتراز بودید و مدل همتراز بدست می آمد که در آن شانس انتخاب شدن هریک از همکاران به عنوان نماینده برابر می شد با یک تقسیم بر تعداد کل.

برای تبیین این اختلاف به مثال زیر توجه کنید:

هم احتمال ولی غیر همتر از

در انتخابات آزادی که هر کس بنا به دلایلی به یک نفر از کاندیداها
رای می دهد . مدل مطمئنا همتر از نیست. (چون از دید رای
دهندگان همه کاندیداها همتر از نیستند)!

ولی ممکن است 50 درصد به یک نفر و 50 درصد به کاندید دوم
رای دهند. در این صورت کاندید اول و کاندید دوم همتر از نیستند
ولی هم شانس هستند.

مثالها:

۱. انتخاب یک نفر از این جلسه توسط من (که هیچ شناختی از افراد ندارم) .

۲. انتخاب تویی از ظرفی که مثلا سه توپ سفید و دو توپ قرمز دارد، به تصادف !

۳. پرتاب سکه ای بدون تقلب
(به اصطلاح سکه سالم)

تعبیر دیگری از احتمال:

۲. مدل فراوانی نسبی (آمار) - با تکرار آزمایشی به طور یکسان

(مثلا پرتاب یک سکه که نمی دانیم در پرتاب آن تقلب می شود یا نه } سکه ناسالم { یا سوال در مورد یک موضوع از افراد مختلف- نظر سنجی ها) ،

فراوانی نسبی یک پیشامد را به عنوان احتمال در نظر می گیرند.

فراوانی نسبی خاصیت تابع احتمال را دارد!

Probability as a relative frequency

یک راه ممکن تعریف احتمال یک پیشامد، استفاده از فراوانی نسبی است. این تعریف معمولاً به صورت زیر است: فرض کنید یک آزمایش که فضای نمونه آن S است، با شرایطی یکسان تکرار می شود. برای هر پیشامد E از این فضای نمونه S ، تعداد دفعاتی را که در n تکرار اول آزمایش، پیشامد E رخ می دهد با $n(E)$ نشان می دهیم. سپس $P(E)$ ، احتمال پیشامد E به صورت زیر تعریف می شود

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

یعنی، $P(E)$ به صورت درصد (حدی) دفعاتی که پیشامد E رخ می دهد تعریف می شود. در این تعریف، احتمال حد فراوانی نسبی پیشامد E است.

هرچند تعریف فوق از نظر شهودی رضایت بخش است و باید خواننده همواره به خاطر

بسیار د، ولی دارای یک اشکال جدی است: چگونه بدانیم که $\frac{n(E)}{n}$ به عددی ثابت به وسیله هر دنباله از تکرارهای آزمایش میل می کند؟ مثلاً، فرض کنید آزمایش تکراری پرتاب یک سکه باشد. چگونه بدانیم که نسبت شیرهای به دست آمده در n پرتاب اول وقتی n بزرگ می شود به سمت عدد معینی میل می کند؟ همچنین با فرض این که این دنباله به عدد معینی همگرا باشد چگونه بدانیم که در تکرارهای بعدی باز هم به همان نسبت از شیرها خواهیم رسید؟

طرفداران تعریف فراوانی نسبی احتمال، معمولاً به این اعتراض چنین پاسخ می دهند که همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض یا یک اصل سیستم است. در هر صورت فرض همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض خیلی پیچیده به نظر می رسد. زیرا، با وجود این که باید امیدوار بود که چنین حدی ثابتی وجود دارد، به هیچ وجه از قبل روشن نیست که این حالت پیش آید. آیا به نظر معقولتر نمی رسد که مجموعه ای از اصول ساده تر و نسبتاً بدیهی را در مورد احتمال فرض بگیریم و سپس سعی کنیم وجود چنین حد ثابتی را به شکلی اثبات کنیم؟ شیوه اخیر روش اصول موضوع جدید نظریه احتمال است که در این کتاب پذیرفته شده است. بخصوص فرض می کنیم که برای هر پیشامد E در فضای نمونه S مقداری مانند $P(E)$ وجود دارد که به آن احتمال E گوئیم. سپس فرض می کنیم که این احتمالات در مجموعه معینی از اصول صدق می کنند، با این امید که خواننده پذیرفته باشد که این اصول بر مبنای مفهوم شهودی احتمال است.

مثالها:

۱. انتخاب یک نفر به عنوان نماینده کلاس توسط شرکت کنندگان (که از همدیگر شناخت دارند). انتخابات مجلس و ریاست جمهوری و غیره!
۲. انتخاب یک ماشین برای خرید ، با توجه به کیفیت تولید آن (یا توسط کنترل کیفیت و یا سوال پرسیدن از دارندگان اتوموبیل ها).
۳. انتخاب تویی از ظرفی که نمی دانیم چند توپ سفید و چند توپ قرمز دارد.
۴. پیش بینی برنده شدن یک تیم، بر اساس بازی های قبلی.
۵. پرتاب سکه ای که نمی دانیم در پرتاب آن تقلب می شود و محاسبه احتمال پیشامد این که در این پرتاب شیر (عدد= رو) ظاهر شود.

آخرین تعبیر احتمال

۳. مدل شخصی. یک نفر بر اساس تخصص خود مقدار احتمالی را به یک پیشامد نسبت می دهد.

مثل پزشکی یا کارشناس یا معلم با تجربه

به هر حال باید احتمالهای نسبت داده شده شرایط تابع احتمال را داشته باشد.



اصل اساسی شمارش

فرض کنید قرار است دو آزمایش انجام شود. در این صورت اگر آزمایش (۱) بتواند به هریک از m برآمد ممکن منتهی شود و اگر برای هر برآمد آزمایش (۱)، n برآمد ممکن از آزمایش (۲) وجود داشته باشد، آن گاه برای دو آزمایش جمعاً mn برآمد ممکن وجود دارد.

مثال: یک مسافر می خواهد از تبریز بیاید تهران و از تهران به زاهدان (تهران هم کاری دارد) . در هر سفر سه انتخاب اتوبوس- قطار و هواپیما را دارد. ولی معمولاً ادم هر تجربه ای بدست آورد نمی خواهد تکرار کند . پس او به ۶ طریق می تواند به تهران رفته و سپس به زاهدان بیاید.

(۱-ق) (۱-ه)

(۱-ق) (۱-ه)

(۱-ه) (۱-ق)

۳ حالت از تبریز به اصفهان و برای هر حالت کار اول ۲ حالت برای کار دوم .یعنی $۲ * ۳ = ۶$ حالت

اصل اساسی تعمیم یافته شمارش

اگر r آزمایش که قرار است انجام شوند طوری باشند که اولی بتواند به هریک از n_1 برآمد ممکن منجر شود، و اگر برای هریک از این n_1 برآمد ممکن، n_2 برآمد ممکن از آزمایش دوم وجود داشته باشد، و برای هریک از برآمدهای ممکن این دو آزمایش، n_3 برآمد ممکن از آزمایش سوم وجود داشته باشد، و الی آخر... آن گاه کلاً $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ برآمد ممکن از r آزمایش وجود دارد.

۳- جایگشتها

چند آرایش مرتب شده مختلف از حروف a ، b و c امکان دارد؟
باشمارش مستقیم ملاحظه می کنیم که ۶ آرایش وجود دارد که عبارت است از abc ،
 acb ، bac ، bca ، cab و cba . هر آرایش یک **جایگشت** نامیده می شود. بنابراین، مجموعه ای
مرکب از ۳ شیء دارای ۶ جایگشت ممکن است. این نتیجه را از اصل اساسی نیز می توان
به دست آورد، زیرا اولین شیء در جایگشت می تواند هریک از ۳ شیء باشد، و سپس شیء دوم
در جایگشت را می توان هریک از ۲ شیء باقیمانده انتخاب کرد و بالاخره شیء سوم در جایگشت
از ۱ شیء باقیمانده انتخاب می شود. در نتیجه $6 = 3 \times 2 \times 1$ جایگشت ممکن حاصل
می شود.

اکنون فرض کنید که n شیء داریم. استدلالی مشابه آنچه که برای ۳ حرف به کار بردیم
نشان می دهد که

$$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

جایگشت مختلف از n شیء داریم.

بطور کلی، وقتی ترتیب انتخاب رعایت می‌شود، $n(n-1)\dots(n-r+1)$ ، تعداد راه‌های مختلفی را که یک گروه r تایی را می‌توان از n قلم انتخاب کرد ارائه می‌دهد و چون هر گروه r تایی $r!$ بار در این شمارش شمرده می‌شود، تعداد گروه‌های مختلف r تایی را که از مجموعه n قلم می‌توان تشکیل داد عبارت است از

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

نماد گذاری و اصطلاحات

برای $r \leq n$ ، $\binom{n}{r}$ را به صورت

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تعریف کرده و می‌گوییم که $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبات n شیء را r به r نشان می‌دهد.^۱ پس $\binom{n}{r}$ تعداد گروه‌های مختلف به حجم r را نشان می‌دهد که از مجموعه n شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب شده است.

۱- بنایه قرارداد $0!$ را برابر ۱ تعریف می‌کنیم. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

در این بخش مسأله زیر را در نظر می‌گیریم: می‌خواهیم مجموعه‌ای مرکب از n عضو متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجمهای $n_1, n_2, \dots, n_r$ تقسیم کنیم، که در آن $\sum_{i=1}^r n_i = n$. چند تقسیم مختلف امکان دارد؟ برای پاسخ به مسأله، توجه داریم که برای

گروه اول $\binom{n}{n_1}$ انتخاب ممکن وجود دارد، برای هر انتخاب گروه اول $\binom{n-n_1}{n_2}$ انتخاب ممکن برای گروه دوم وجود دارد، برای هر انتخاب دو گروه اول، $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ انتخاب ممکن برای گروه سوم وجود دارد؛ و به همین ترتیب الی آخر. بنابراین از اصل اساسی شمارش تعمیم یافته، به تعداد

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} \\ &= \frac{n!}{(n-n_1)! n_1!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! n_2!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0! n_r!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} \end{aligned}$$

تقسیم ممکن وجود دارد.

اگر $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ آن گاه $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ را با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

تعریف می کنیم . پس $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ تعداد تقسیمهای ممکن n شیء متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجمهای $n_1, n_2, \dots, n_r$ ، نشان می دهد .

آمار چیست؟

آمار علم جمع آوری ، سازماندهی ، ارائه ، تجزیه و تحلیل و به بیان کامل تر تفسیر و یادگیری از **داده ها** است.

(داده قطعه ای از اطلاعات معنی دار)

آمار علم است و همچنین هنر یادگیری از داده ها است. به عنوان یک رشته آن را با جمع آوری، تجزیه و تحلیل، تفسیر داده ها و همچنین ارتباط موثر و ارائه نتایج با تکیه بر داده ها می شناسیم.

آمار در قلب انواع استدلالهای کمی لازم برای پیشرفت های مهم در علومی مانند پزشکی و ژنتیک و برای تصمیم گیری های مهم در کسب و کار و سیاست عمومی قرار دارد.

بیان های دیگر:

آمار در قلب انواع استدلالهای کمی لازم برای پیشرفت های مهم در علمی مانند پزشکی و ژنتیک و حتی مسایل اجتماعی برای تصمیم گیری های مهم در کسب و کار و سیاست عمومی قرار دارد.

در قرن اخیر (قرن اطلاعات) آمار به علم انجام و به نتیجه رساندن علوم دیگر تبدیل شده است، زیرا تنوع و گستره ی علم آمار در حل مشکلاتی نظیر تشخیص کسب و کارهای سودآور، تحقیقات پزشکی و درمان بیماری هایی مانند سرطان، بهبود و ارتقاء استانداردهای زندگی، بانک داری، کمک به شرکت های هوایی در سودآوری بیشتر و حتی تحلیل شبکه های اجتماعی، شناخت و پیش بینی اپیدمی ها، بیمه و سایر زمینه هاست

در قرن 21 ،چه کسانی به آمار نیاز دارند؟

تمام افرادی که می توانند نگاهی انتقادی به اطلاعات داشته و با هر اطلاعاتی گمراه نشوند.

یا افرادی که به دنبال حل مشکلاتی نظیر: ایجاد یک کسب و کار سودآور و یا درمان بیماری هایی مانند سرطان یا کرونا هستند و از این طریق قصد ارتقاء و بهبود استانداردهای زندگی را دارند نمی توانند خود را از آمار بی نیاز بدانند زیرا:

موضوع آمار طراحی راه هایی برای جمع آوری داده ها برای پاسخ دهی به این گونه سوالات می باشد،که با جمع آوری صحیح اطلاعات موردنیاز و بیان آن چه که داده ها نشان می دهند پاسخی قابل اعتماد به این پرسش ها داده شود.

چند نکته:

۱. اشاره به مطالبی که دانش آموزان در سالهای قبل در این رابطه خوانده اند.

۲. دیدیم که همیشه فرمول **تعداد حالات مساعد به تعداد حالات ممکن** برای محاسبه احتمال بکار نمی رود و شرایط همترازی و تعداد محدود اعضای فضای نمونه (حالات ممکن) لازم است تا بتوان از این فرمول استفاده کرد.

۳. آوردن مثال از درس های دیگر همان پایه و یا محیط اطراف دانش آموز.

۴. مسایل شمارش فقط ضرب تعداد حالت های ممکن نیست. اگر چه اصول شمارش مهم هستند.

۵. آوردن مثال های ساده در ابتدا با تعداد محدود و نه استفاده از نمادهای

n, m

آمار چیست؟

- استفاده از داده ها براي نتیجه گيري در مورد مسایل نامعلوم

- تصميم گيري در زمان وجود عدم قطعيت

داده چیست؟

- قطعه ای از اطلاعات معني دار (مثل رنگ چشم نوزاد يا ميزان در آمد يك نفر در ماه دی)

- اعداد در صورتي كه مفهومي با آن ها عجین باشد.

داده ها چگونه به دست می آیند؟ •

مشاهده

مشاهده یک فرد یا شیء، اندازه
گیری یا شمارش یک متغیر

آزمایش

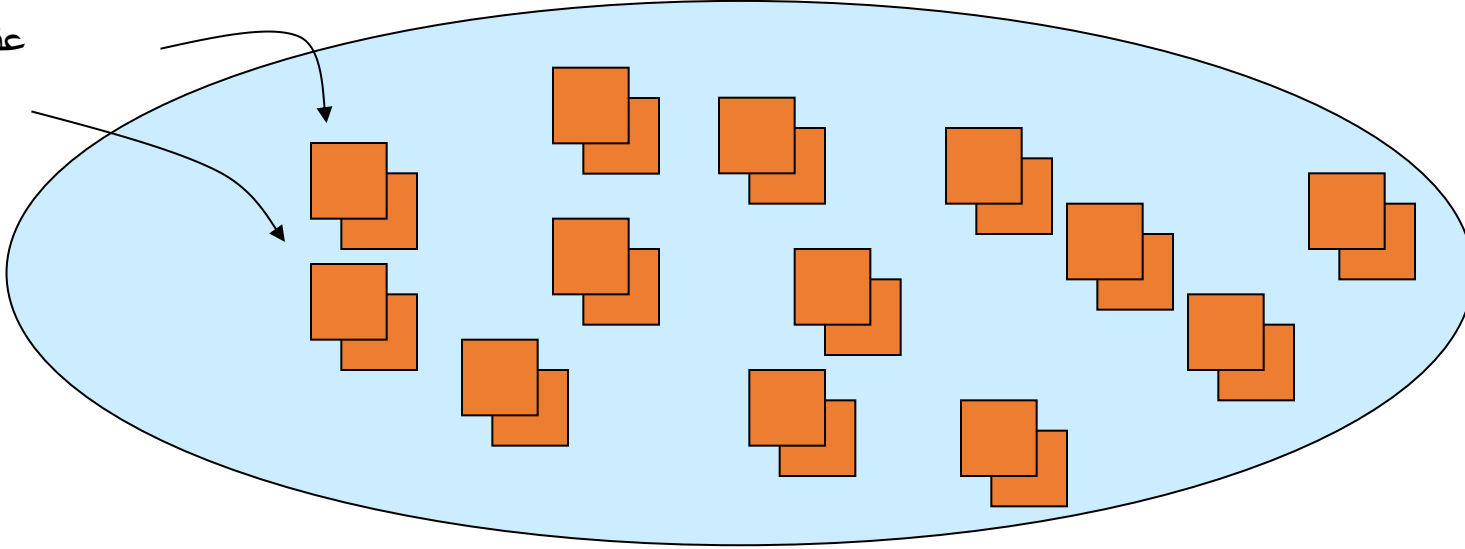
پیاده کردن یک معالجه یا یک
آزمایش بر روی فرد یا شیء با هدف
مشاهده تاثیر عامل یا عواملی
خاص

زبان مشترک

- جمعیت
- عنصر
- چارچوب نمونه گیری
- نمونه
- مطالعه نمونه ای (نحوه جمع آوری)
- سرشماری
- متغیر یا متغیرها (خصوصیت یا ویژگی هایی از عناصر)

جمعیّت

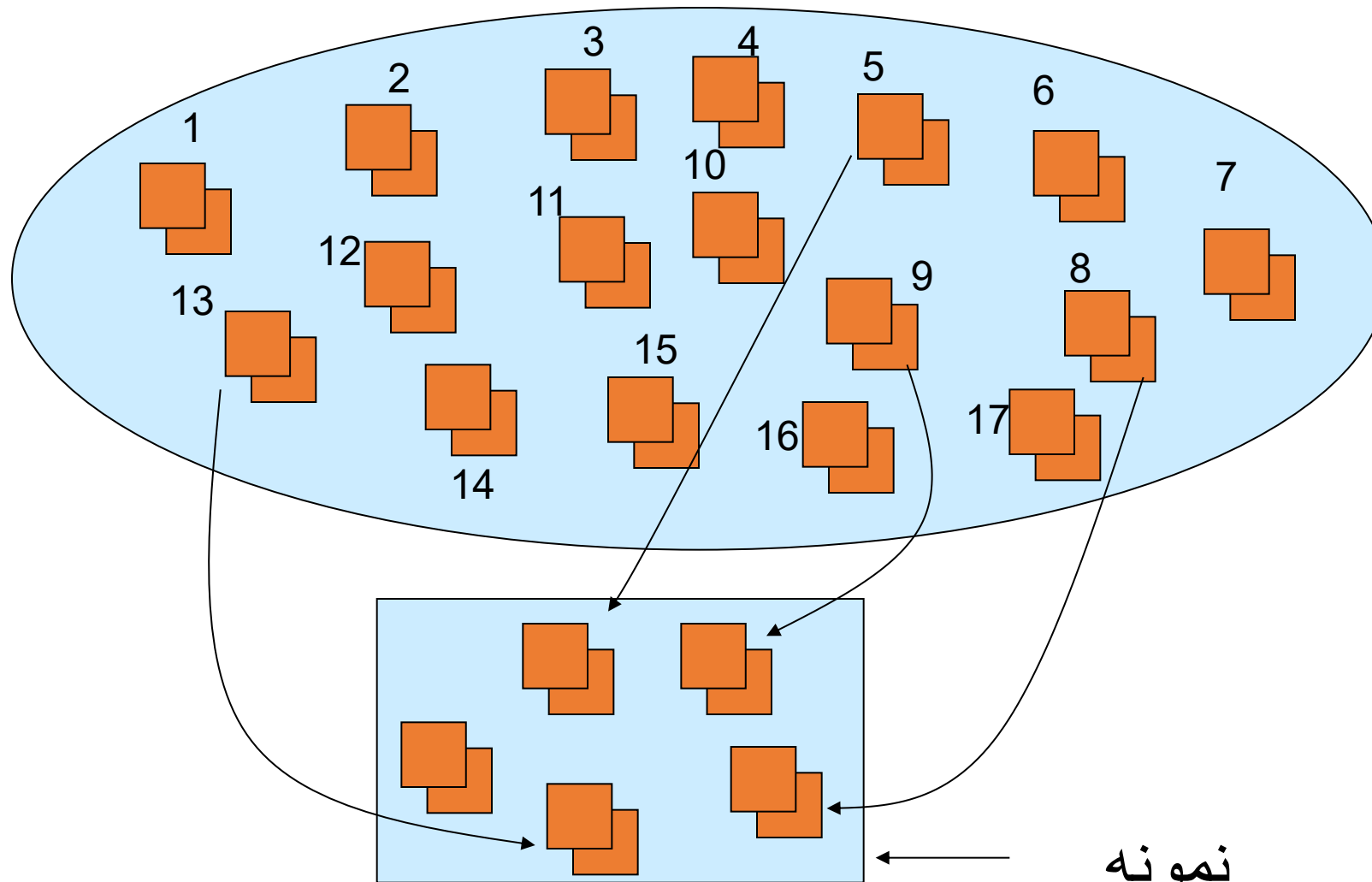
عناصر



لیست عناصر

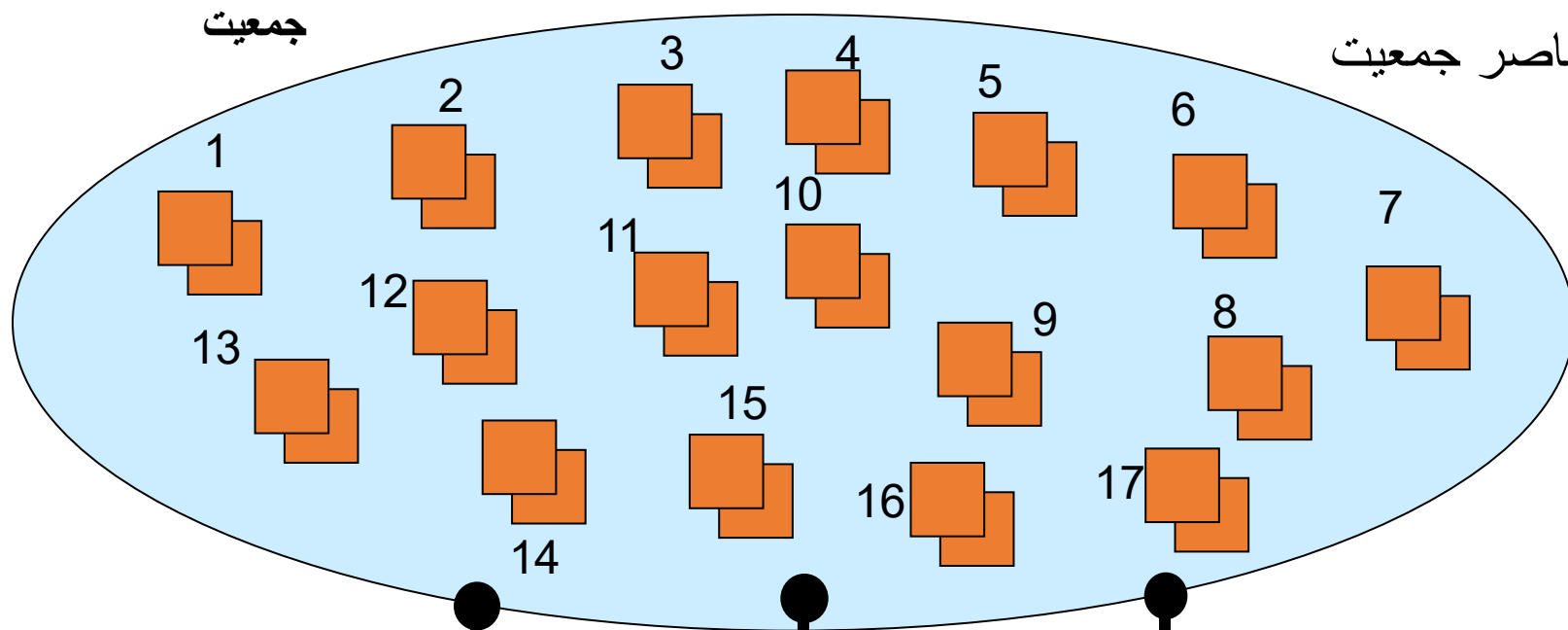
جمعیت

چارچوب نمونه گیری



- 1
- 2
- ✓ 3
- 4
- 5
- ✓ 6
- ✓ 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- ✓ 12
- 13
- ✓ 14
- 15
- 16
- 17

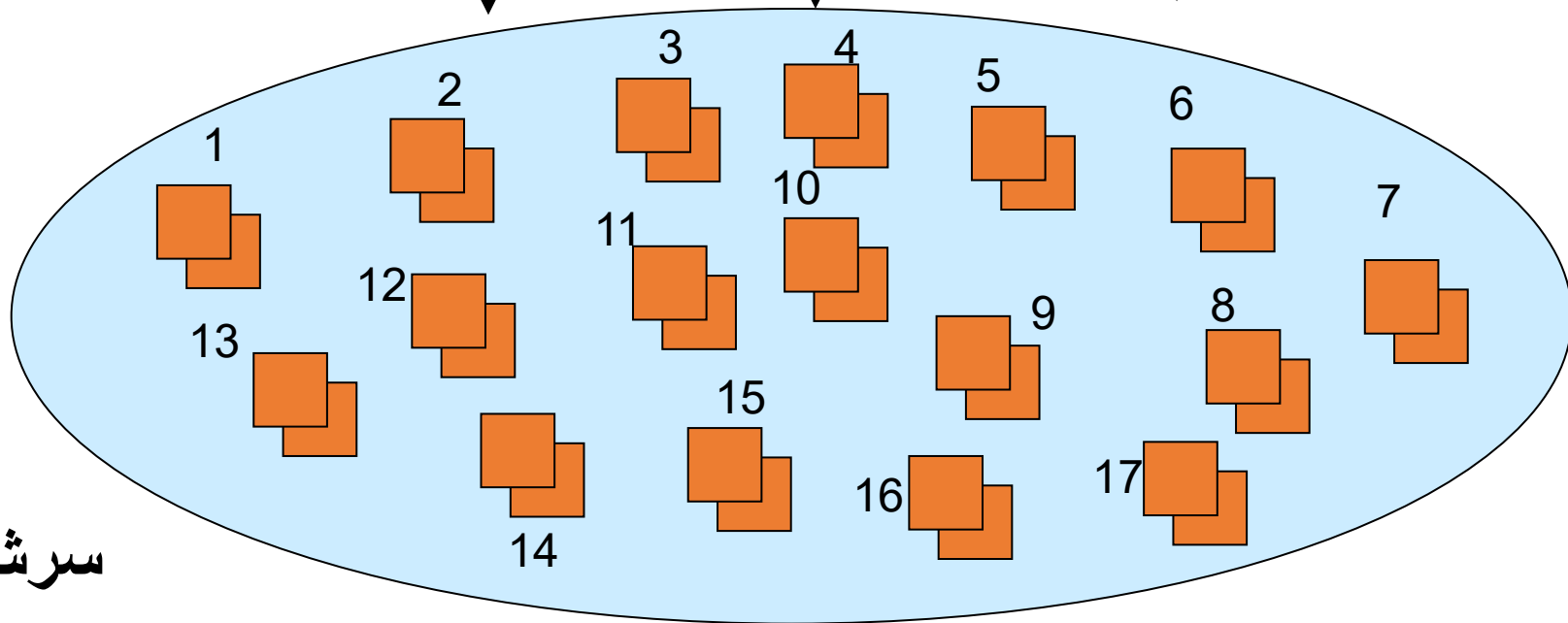
نمونه



جمعیت

لیست عناصر جمعیت

- ✓ 1
- ✓ 2
- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6
- ✓ 7
- ✓ 8
- ✓ 9
- ✓ 10
- ✓ 11
- ✓ 12
- ✓ 13
- ✓ 14
- ✓ 15
- ✓ 16
- ✓ 17



سرشماری

نمونه گيري تصادفي ساده

- هر عنصر جمعيت با شانس مساوي با ديگران براي نمونه انتخاب شود.

- هر گروه از عناصر جمعيت با تعداد مساوي n ، شانس يکسان براي انتخاب شدن در نمونه را داشته باشد.

- انتخاب تصادفي

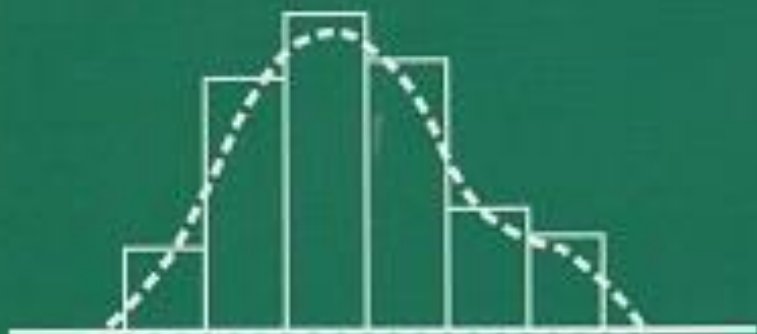
- بيرون آوردن اسامي از داخل يک ظرف

- استفاده از جدول اعداد تصادفي با استفاده از کدگذاري ليست عناصر

- استفاده از اعداد تصادفي توليد شده توسط کامپيوتر يا ماشين حساب



آمار و احتمال مقدماتی

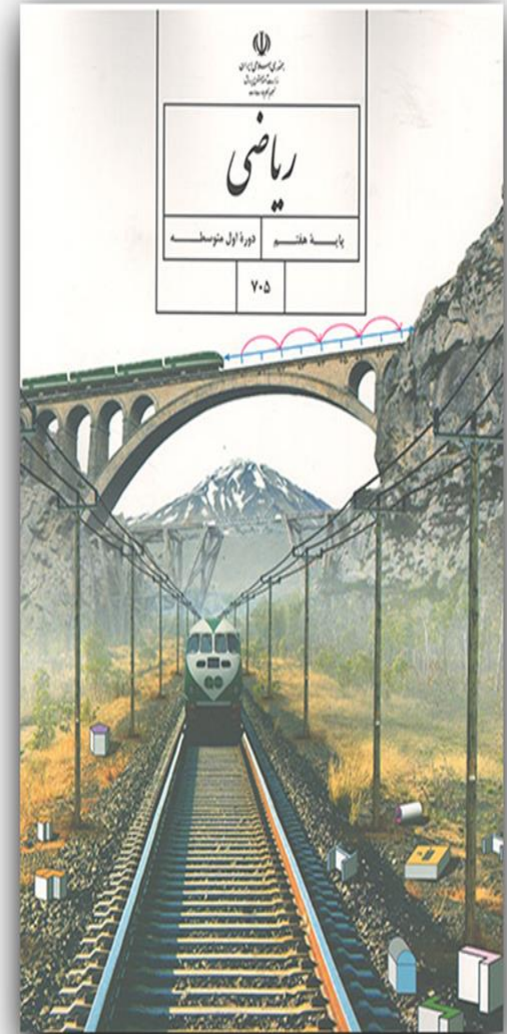


چند نکته

۱. نمودارهای دایره ای و میله ای برای داده های کیفی و کمی گسسته بکار می روند
۲. هیستوگرام برای داده های پیوسته بکار می رود.
۳. اگر دو دسته داده داشته باشیم و بخواهیم مقایسه کنیم – باید از فراوانی نسبی استفاده کنیم.

۱۱۱	فصل ۹- آمار و احتمال
۱۱۲	جمع‌آوری و نمایش داده‌ها
۱۱۵	نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها
۱۱۸	احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۲۱	احتمال و تجربه
۱۲۴	مرور فصل ۹

مطالب ساده و ابتدایی بدون توجه به آنچه دانش آموزان در دبستان خوانده‌اند. با سرشماری از یک کلاس درس شروع می‌کند. بعد خلاصه کردن داده‌ها را مطرح می‌کند. مجدداً نمودار میله‌ای بدون اشاره به آنچه در دبستان خوانده‌اند و سپس مقایسه نمودارها را بیان می‌کند.



اولین مثال:

جمع آوری و نمایش داده‌ها

معلم ورزش یک مدرسه می‌خواهد برای دانش‌آموزان کلاس، لباس ورزشی سفارش دهد. او از جواد و محمد خواست نظرهای دانش‌آموزان را جمع‌آوری کنند تا رنگ مورد علاقه دانش‌آموزان کلاس مشخص شود.



جواد رنگ مورد نظر همه دانش‌آموزان را از آنها پرسید و پاسخ‌های زیر را دریافت کرد.

سبز، آبی، زرد، زرد، بنفش، زرد، قرمز، زرد، قهوه‌ای، قهوه‌ای، قهوه‌ای، سبز، زرد، آبی، سبز، بنفش، قرمز، قهوه‌ای، قهوه‌ای، آبی، زرد، سبز، قهوه‌ای، زرد، زرد، زرد، قرمز، زرد، زرد، قهوه‌ای، قهوه‌ای و سبز.

محمد به روش دیگری اطلاعات را جمع‌آوری کرد. او ۳ رنگ را تعیین کرد و از همه دانش‌آموزان خواست یکی از این سه رنگ را انتخاب کنند. او پاسخ‌های زیر را دریافت کرد.

سبز، قهوه‌ای، قهوه‌ای، سبز، زرد، زرد، سبز، قهوه‌ای، زرد، سبز، قهوه‌ای، سبز، زرد، زرد، سبز، قهوه‌ای، قهوه‌ای، زرد، زرد، قهوه‌ای، سبز، زرد، قهوه‌ای، سبز، زرد، زرد، قهوه‌ای و زرد.
دو روش جمع‌آوری اطلاعات را با هم مقایسه کنید. ویژگی‌های مثبت و منفی هر روش را بیان کنید.

مساله یکی نیست که قابل مقایسه باشد. دومی محدودیت انتخاب دارد!

شروع احتمال با آوردن مثالهایی از پیشامدهای غیر محتمل - حتمی و با احتمال بین صفر و یک است. بدون اشاره به مطالبی که در دبستان خوانده اند و نیز بدون اشاره به مفهوم پیشامد و حتی نوشتن مفهوم احتمال به صورت یک جمله !

احتمال یا اندازه گیری شانس

کدام اتفاق‌ها از میان موارد زیر حتماً رخ می‌دهند؟ کدام‌ها ممکن نیست رخ دهند؟ کدام موارد ممکن است اتفاق بیفتند؛ ولی حتمی

نیستند؟

فعالیت



الف) بلافاصله بعد از ماه فروردین، ماه خرداد باشد.

ب) امروز تولد یکی از همکلاسی‌هایتان باشد.

ج) تولد شما در این ماه باشد.

د) یک تاس بیندازید، عددی بزرگ‌تر از ۷ بیاید.

ه) یک تاس بیندازید، عددی زوج بیاید.

و) یک تاس بیندازید، عددی کوچک‌تر از ۷ بیاید.

ز) بدون نگاه کردن به رنگ مهره‌ها، یک مهره از کیسهٔ روبه‌رو بیرون بیاورید که آبی باشد.

پاسخ‌هایتان را با دوستانتان مقایسه کنید. در کدام موارد همه پاسخ یکسانی داده‌اید؟ در کدام موارد پاسخ‌هایتان با هم فرق می‌کند؟

احتمال را فقط با حالت همتر از مطرح کرده است. درحالی که می دانیم بیشتر موارد این چنین نیست! به دانش آموزان این مساله القا می شود که احتمال عبارتست از تعداد حالات مساعد به حالات ممکن و در نتیجه این سوال را هم مطرح می کند!

۲- چرا احتمال رخ دادن یک اتفاق، صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است؟

انتظار از جواب به این سوال بیان و اثبات یک قضیه ریاضی است که چون مجموعه حالات مساعد زیر مجموعه مجموعه حالات ممکن است - پس تعداد در صورت همیشه کمتر از مخرج و هر دو هم مثبت هستند - پس احتمال بین صفر و یک است!

در مرور فصل بدون تشریح اصطلاحات آماری – در جمع بندی ادعا می کند که دانش آموز باید این مفاهیم را متوجه شده باشد.

۹

مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل، اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

• آمار • جمع‌آوری داده • نمونه‌گیری • اتفاق‌های هم‌شانس • احتمال

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- سازماندهی داده‌ها در جدول
- رسم نمودار ستونی
- رسم نمودار خط شکسته
- رسم نمودار تصویری
- کاربرد هر یک از نمودارها در مسائل مختلف
- انتخاب نمودار مناسب برای موضوع مورد نظر
- تشخیص حتمی، ممکن یا غیرممکن بودن یک اتفاق
- پیدا کردن احتمال رخ دادن یک اتفاق
- آزمایش و ثبت نتایج مربوط به یک اتفاق تصادفی
- مقایسه احتمال رخ دادن یک اتفاق با نتایج آزمایش‌ها

کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره، کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادها از جمله بارندگی، سیل، بارش برف و... را پیش‌بینی کنیم.

بدون این که احتمال را برای حالت هایی که مستقلاً (یعنی بدون تاثیر روی تکرارها) قابل انجام هستند با فراوانی نسبی جایی مطرح کند این مساله را بیان داشته است:

تمرین های ترکیبی

در صورتی که بتوانید تمرین های ترکیبی زیر را انجام دهید، مطمئن می شوید که این فصل را به خوبی آموخته اید.

یک تاس را ۱۰ بار بیندازید و نسبت تعداد دفعاتی را که عدد زوج آمده، به تعداد کل آزمایش ها، پیدا کنید و با یک کسر، نمایش دهید.

احتمال زوج بودن عدد روی تاس را محاسبه کنید و با یک کسر، نمایش دهید.

آیا این دو کسر همیشه با هم برابرند؟

آیا ممکن است این دو کسر با هم برابر باشند؟

آیا می توان گفت که وقتی تعداد آزمایش ها زیاد می شود، انتظار داریم که این دو کسر تقریباً برابر شوند؟



۱۱۹

آمار و احتمال

فصل ۸

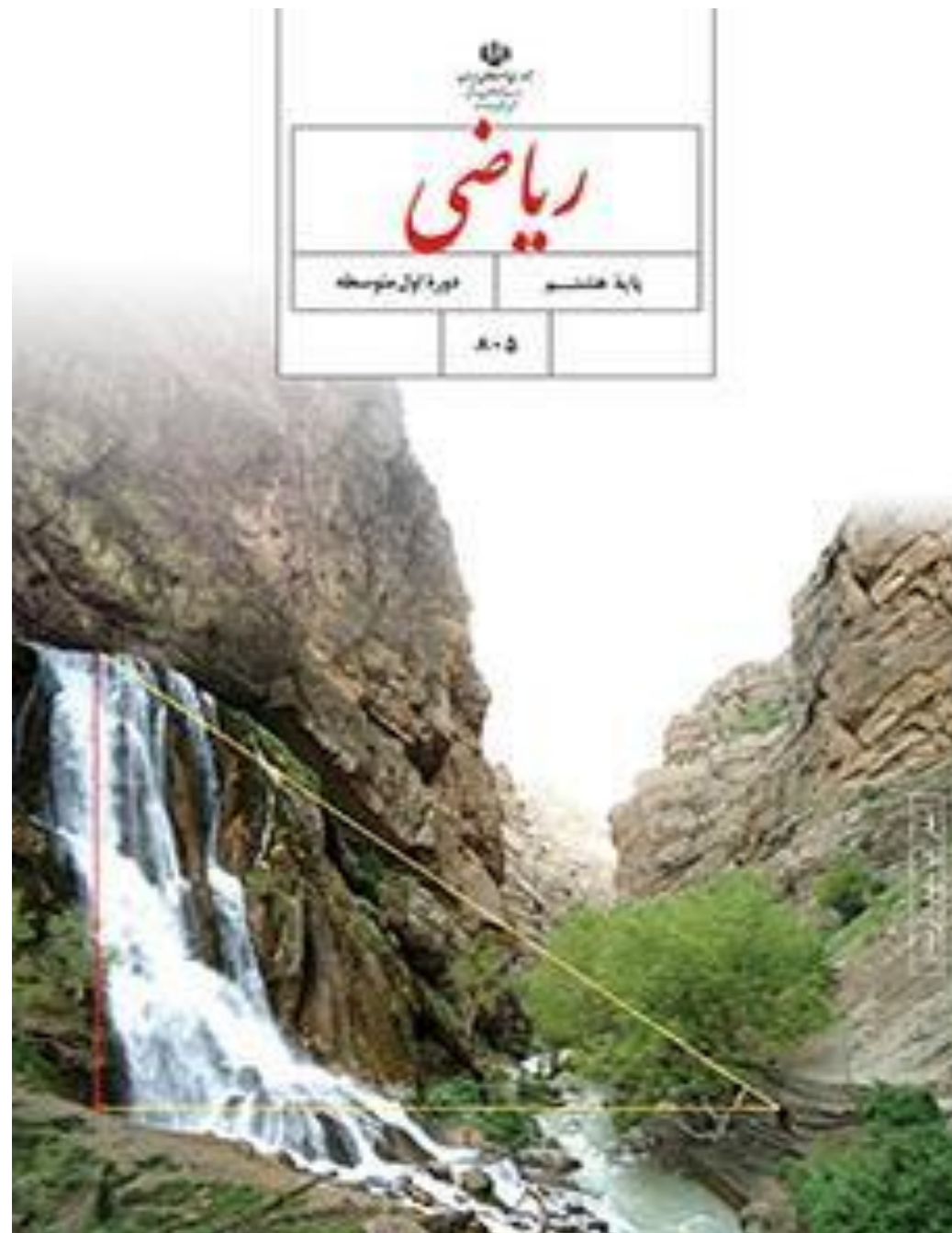
درس اول: دسته‌بندی داده‌ها ۱۲۰

درس دوم: میانگین داده‌ها ۱۲۴

درس سوم: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۱۲۸

درس چهارم: بررسی حالت‌های ممکن ۱۳۲

مرور فصل ۸ ۱۳۶



مرور فصل هشت تا حدودی درست است - ولی باز هم احتمال را فقط در حالت
همترازی تعریف کرده است و مثالهای بسیار کمی دارد و مفاهیم هم به طور کامل
تشریح نشده اند.

مرور فصل ۸

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها
را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- مرکز دسته
- فراوانی
- میانگین
- آمار
- احتمال
- نمودار درختی
- حالت‌های هم‌شانس
- جدول حالت‌های ممکن

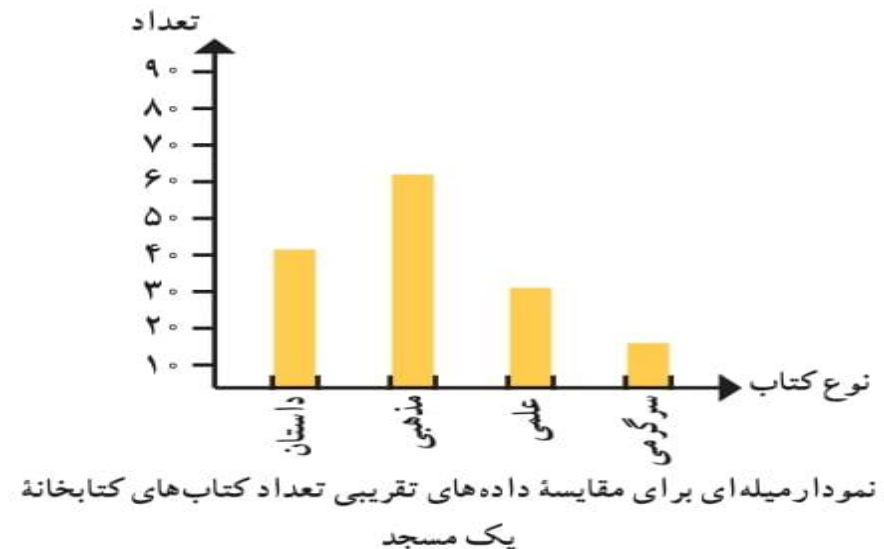
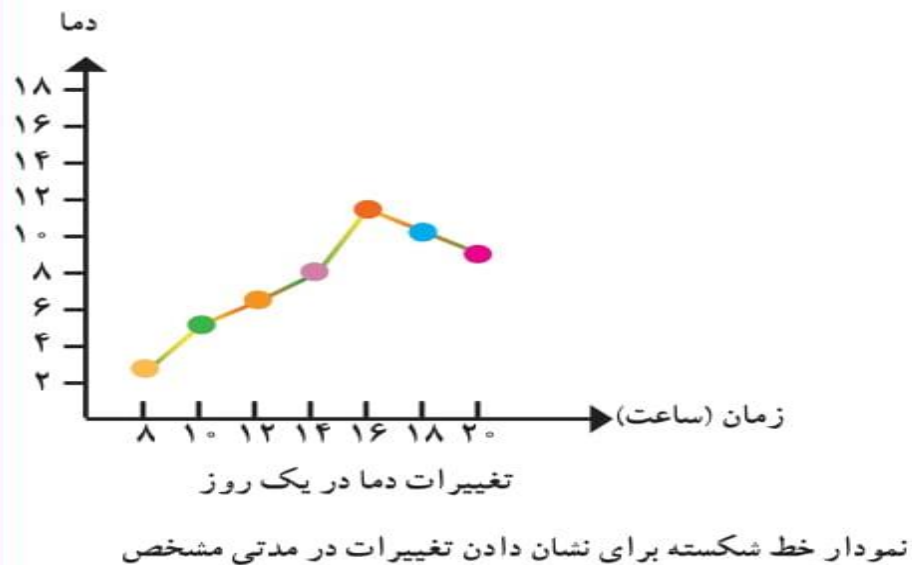
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در
دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پیشامد
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

این فصل خوب شروع شده است:

دسته‌بندی داده‌ها

در سال‌های پیش با **علم آمار**، که علم جمع‌آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها) است، آشنا شدید. **داده‌ها** را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید؛ سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.

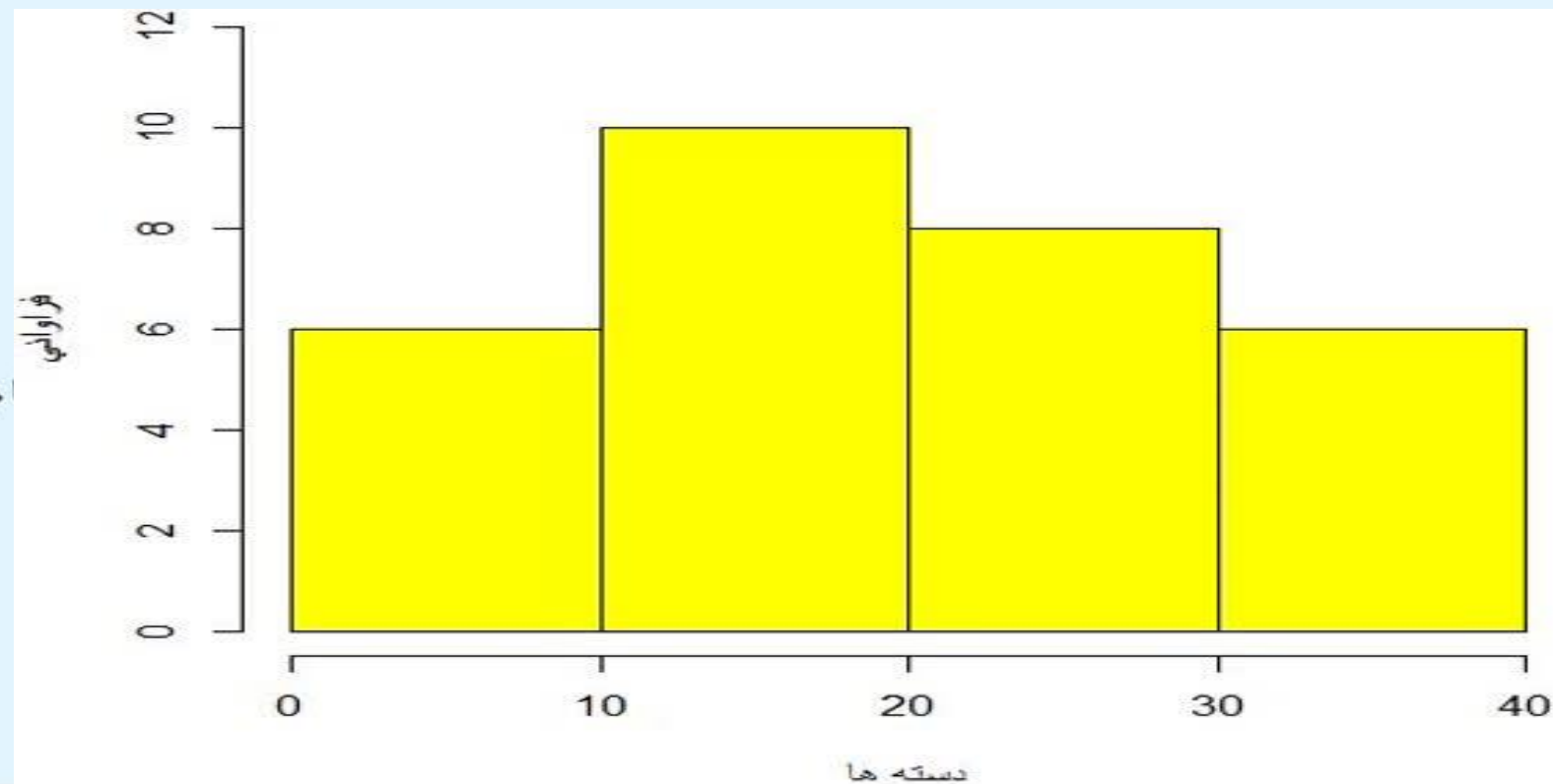
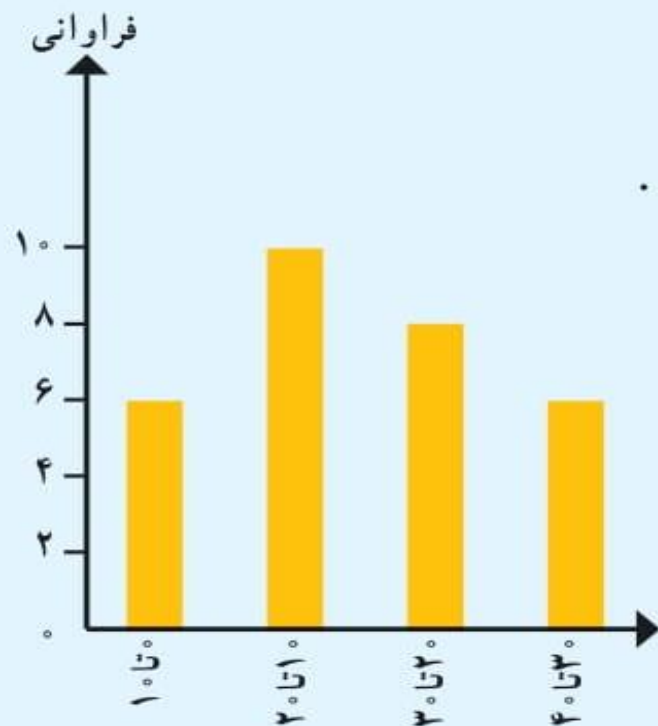


کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کنیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده‌ها را به دست آورید.





در کتاب نهم هیچ فصلی به احتمال و آمار اختصاص ندارد . فقط در آخرین قسمت از فصل اول فقط در چهار صفحه احتمال در حالت همترازی مجددا تعریف و چند مثال ساده بیان شده است- که به هیچ وجه حق مطلب ادا نشده است.

فصل ۱ مجموعه‌ها ۱

- درس اول: معرفی مجموعه ۲
- درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها ۶
- درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ۱۱
- درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال ۱۵



اما حرف های آخر:

۱. توجه به ارتباطات افقی و عمودی مفاهیم درس (یادتان میاید که در کلاس... یا همانطور که در درس فیزیک دیدید.....)
۲. تعامل با دانش آموزان (همه آنها)
۳. فرصت دادن به همه دانش آموزان
۴. آماده بودن برای تدریس و مطالعه کردن قبل از کلاس درس
۵. توجه به علاقه دانش آموزان، استفاده از موضوعات اطراف و مورد علاقه

دروس آمار و احتمال در عصر اطلاعات یک ضرورت است- برای مدلسازی ریاضی مفیدست و تدریس آن برای معلمان و کلاسهای آن برای دانش آموزان هیجان بخش و لذت آفرین است.

و مدرسان درس آمار و احتمال باید هم آگاه به نحوه تدریس- موضوعات محتوایی درس و معتقد به اهمیت آن باشند.

.....